КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФОРМАЦИИ CA-$\mathfrak{F}$-ГРУПП И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУПП

Е.Н. Мысловец

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь myslovets@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Важной задачей теории групп является изучение формаций. Напомним, что формацией называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. В 1963 году в работе [1] Гашюц положил начало систематическому изучению формаций групп. Он ввел понятие насыщенной формации, которое в настоящее время является классическим и активно применяется в исследовании различных вопросов теории групп и ее приложений в теории формальных языков и автоматов (см. [2]).

В связи с вопросом построения насыщенных формаций в работе [3] было введено понятие локальной формации. В дальнейшем было доказано, что всякая непустая формация является насыщенной тогда и только тогда, когда она является локальной [4, IV, Теорема 4.6].

Наряду с локальными формациями важную роль играют композиционные формации. Впервые композиционные формации были введены и рассматривались Л.А. Шеметковым в [5]. Пусть J — класс всех простых групп, а $\mathcal{K}_G$ — множество всех композиционных факторов группы G, взятых с точностью до изоморфизма. Отображение $f : \mathfrak{J} \to \{\text{формации}\}$ называется композиционным экраном. Формация $\mathfrak{F}$ называется композиционной, если она имеет хотя бы один композиционный экран f такой, что $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/C_G(H/K) \in f(A)$ для любого главного фактора H/K и $A \in \mathcal{K}_{H/K})$. Наряду с этим, композиционные формации рассматривались в другой терминологии Р. Бэром в неопубликованной рукописи (отмечено в [4, IV, стр. 370]). Р. Бэр ввел понятие разрешимо насыщенной формации. Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется разрешимо насыщенной, если из того, что $G/\Phi(G_{\mathfrak{S}}) \in \mathfrak{F}$, всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Эквивалентность двух понятий дает теорема Бэра [4, IV, Теорема 4.17] о том, что непустая формация является композиционной тогда и только тогда, когда она разрешимо насыщенная. Каждая локальная формация является композиционной. Класс всех квазинильпотентных групп является примером композиционной формации, не являющейся локальной.

Композиционные формации нашли применение при изучении формационной стабильности при действии групп автоморфизмов, свойств корадикалов, гиперцентров, исследовании алгебры формаций и других вопросов. Однако, в отличие от локальных формаций применение композиционных формаций при изучении произведений групп до последнего времени оставалось незначительным. Это объясняется отсутствием достаточного количества конкретных конструкций и примеров композиционных формаций. Поэтому возникает задача конструирования новых примеров композиционных формаций, полезных для изучения факторизаций групп. Пример такой конструкции был предложен Го Вэньбинем и А.Н. Скибой в работах [6, 7]. В настоящей работе продолжены исследования в данном направлении.

В.А. Ведерников в [8] ввел понятие c-сверхразрешимой группы. Напомним, что группа G называется c-сверхразрешимой, если она обладает главным рядом, все факторы которого изоморфны простым группам. Свойства класса $\mathfrak{U}_c$ всех c-сверхразрешимых групп были изучены А.Ф. Васильевым и Т.И. Васильевой в работе [9]. В частности, они доказали, что класс $\mathfrak{U}_c$ является композиционной, но ненасыщенной формацией. В работе [10] Д. Робинсон установил структурные свойства c-сверхразрешимых групп (в терминологии [10] SC-групп).

В работе [11] было введено понятие конечной ca-$\mathfrak{F}$-группы, являющееся обобщением c-сверхразрешимости. Были установлены основные свойства класса $\mathfrak{F}_{ca}$ всех ca-$\mathfrak{F}$-групп и произведений нормальных ca-$\mathfrak{F}$-подгрупп.

Определение [11]. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Будем говорить, что группа G является *ca*-$\mathfrak{F}$-группой, если ее каждый неабелевый главный фактор является простой группой, а для каждого ее абелевого главного фактора H/K выполняется $H/K \rtimes C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$.

Теорема 1 [11]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и f — ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда формация $\mathfrak{F}_{ca}$ является композиционной и имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что $h(N) = \mathfrak{F}_{ca}$, если N — простая неабелева группа и $h(N) = f(p)$, если N — простая p-группа, где p — простое число.*

Следующая теорема описывает структурные свойства конечной *ca*-$\mathfrak{F}$-группы.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая насыщенная формация. Группа G является ca-$\mathfrak{F}$-группой тогда и только тогда, когда G удовлетворяет следующим утверждениям:*

1) $G^{\mathfrak{S}} = G^{\mathfrak{F}}$;

2) если $G^{\mathfrak{S}} \neq 1$, то $G^{\mathfrak{S}}/Z(G^{\mathfrak{S}})$ является прямым произведением G-инвариантных простых групп.

3) $Z(G^{\mathfrak{S}}) \subseteq Z_{\mathfrak{F}}^{\infty}(G)$.

Следуя [12, с. 149], группу $G = HK$ будем называть произведением взаимно перестановочных подгрупп H и K, если H перестановочна с любой подгруппой из K, а K перестановочна с любой подгруппой из H.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая класс $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп. Если группа $G = HK$ — произведение взаимно перестановочных ca-$\mathfrak{F}$-подгрупп H и K и коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G — ca-$\mathfrak{F}$-группа.*

Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$, то справедливо следующее

Следствие 3.1 [13]. *Пусть $G = HK$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если H и K c-сверхразрешимы и коммутант G' группы G квазинильпотентен, тогда G — c-сверхразрешимая группа.*

Литература

1. Gaschütz W. *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen.* Math. Z. 1963. Bd. 80. № 4. S. 300–305.
2. Ballester-Bolinches A., Pin J.-E., Soler-Escriva X. *Languages associated with saturated formations of groups* // Forum Mathematicum. 2013. V. 27. № 3. P. 1471–1505.
3. Gaschütz W., Lubeseder U. *Kennzeichnung gesättigter Formationen* // Math. Z. 1963. Bd. 82. S. 198–199.
4. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.
5. Шеметков Л. А. *Два направления в развитии непростых конечных групп (доклад, прочитанный на XII Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме в Свердловске в сентябре 1973 г.)* // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30. № 2. С. 179–198.
6. Guo W., Skiba A. N. *On finite quazi-$\mathfrak{F}$-groups* // Communication in Algebra. 2009. V. 37. P. 470–481.
7. Guo W., Skiba A. N. *On some classes of finite quazi-$\mathfrak{F}$-groups* // Journal of Group Theory. 2009. V. 12. P. 407–417.
8. Ведерников В. А. *О некоторых классах конечных групп* // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32. № 10. С. 872–875.
9. Васильев А. Ф., Васильева Т. И. *О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами* // Изв. вузов. Сер. Математика. 1997. Т. 426. № 11. С. 10–14.
10. Robinson D. J. S. *The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation* // J. Austral. Math. Soc. 2001. V. 70. P. 143–149.
11. Мысловец Е.Н. *О конечных ca-$\mathfrak{F}$-группах* // Проблемы физики, математики и техники. 2014. Т. 2. № 19. С. 64–68.
12. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. *Products of Finite Groups.* Berlin: Walter de Gruyter, 2010.
13. Ballester-Bolinches A., Cossey J., Pedraza-Aguilera M.C. *On mutually permutable products of finite groups* // Journal of Algebra. 2005. V. 294. P. 127–135.